TEMA 5

SERIES COMPLEJAS

1. Sucesiones y series numéricas en $\mathbb{C}$

1.1 Sucesiones de números complejos

Definición. Una **sucesión** de números complejos es una aplicación $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Se identifica s con el conjunto de sus imágenes $s(n) = z_n$ ordenadas, y se escribe $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Se dice que z_n es el término general.

Definición. Sean $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que $s(n) = z_n$ y $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente. La sucesión $s \circ \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, definida por $(s \circ \alpha)(n) = z_{\alpha(n)}$ se llama subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ determinada por α.

Definición. Una sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es **convergente** si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ verificando: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Se dice que $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge a** z_0 o que z_0 **es el límite de** $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Proposición 1. Si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, el límite es único.

Proposición 2. Dada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, se verifica:

1. Si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, toda subsucesión suya converge y tiene el mismo límite.
2. Si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente $\Longrightarrow (z_n - z_{n-1})_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Proposición 3. Sean $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z_0) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z_0)$$

Proposición 4. Sean $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes. Se verifica:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n\right) / \left(\lim\limits_{n\to\infty} w_n\right)$, si $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$.

Proposición 5. Si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 y $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = 0$.

Proposición 6. Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Dom}(f)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$.

Ejemplo 1. Estudio de la convergencia de las sucesiones cuyo término general es:

a) $z_n = \dfrac{2 + in}{1 + 3n}$. **b)** $z_n = i^n$. **c)** $z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n$. **d)** $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\pi/n}$.

Convergencia de $(\mathbf{c}^n)_{n=1}^{\infty}$: Si $c \in \mathbb{C} \Longrightarrow (c^n)_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \text{converge a 0 si } |c| < 1 \\ \text{converge a 1 si } c = 1 \\ \text{no converge si } |c| \geq 1 \wedge c \neq 1. \end{cases}$

1.2 Series numéricas complejas

Definición. Dada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, se llama **suma parcial n-ésima** de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ a la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

$(S_n)_{n=1}^{\infty}$ se llama **sucesión de sumas parciales** asociada a $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.
El par $((z_n)_{n=1}^{\infty}, (S_n)_{n=1}^{\infty})$ se llama **serie** y se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$. Los elementos de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ se llaman términos de la serie, siendo z_n el **término general**.

Definición. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **convergente** si $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y se dice que $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ es su **suma**; se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

Proposición 7. Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ejemplo 2. **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i\pi/n}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(i^n + \frac{1}{n^2}\right)$.

Convergencia de la serie geométrica

Dado $c \in \mathbb{C}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1}$, que también se escribe $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$, verifica:

- Converge y su suma es $S = \frac{1}{1-c}$ si $|c| < 1$.
- No converge si $|c| \geq 1$.

Ejemplo 3. **a)** $\sum_{n=0}^{\infty} (i/3)^n$. **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} (1/(2i))^n$.

Proposición 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ convergente si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ convergentes; además

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re} S \ \wedge \ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im} S.$$

Proposición 9. Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ son convergentes, se verifica:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n)$ es convergente siendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot z_n)$ es convergente siendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot z_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$

Ejemplo 4. **a)** $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c^n$, con $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| < 1$. **b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 3/(1+i)^n$.

Definición. Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge.

Proposición 10. Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

Observación: El recíproco no es cierto. Por ejemplo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{n}$ converge y no converge absolutamente.

Criterios de convergencia de series numéricas

Proposición 11. (Test de comparación) Dada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, si $|z_n| \leq M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente.

Ejemplo 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i(n^2+n)}}{n^2}$ es convergente.

Proposición 12. (Criterio de la raíz) Dada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, se verifica

- Si $L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
- Si $L > 1$ ó $+\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge.

Proposición 13. (Criterio del cociente) Dada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = L$ se verifica

- Si $L < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
- Si $L > 1$ ó $+\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge.

Ejemplo 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^3}{(1+i)^n}$ es convergente.

1.3 Sucesiones y series de funciones

Introducción

$\forall n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(z) = z^n$. Se verifica $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \\ \nexists \text{ en } \mathbb{C} & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Para $z \in \Omega = D(0,1) \cup \{1\}$ la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ proporciona aproximaciones "tan buenas como se quiera" a $f(z)$ donde $f(z) = 0$ si $|z| < 1$ y $f(1) = 1$. ¿La sucesión de funciones $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ proporciona aproximaciones a f en Ω "tan buenas como se quiera"?

Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge puntualmente** a f en Ω si $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$.

2. $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ **converge uniformemente** a f en Ω si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in \Omega \wedge \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)|) = 0$.

Definición. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. La **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge puntualmente** a la función S en Ω si la sucesión $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en Ω: $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = S(z)$ $\forall z \in \Omega$.

2. Se dice que **la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente** a la función suma S en Ω si la sucesión $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en Ω.

Observación.

a) Si una sucesión (o serie) de funciones converge uniformemente en $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces converge puntualmente en Ω.

b) El recíproco de a) no es cierto: $(z^n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $D(0,1) \cup \{1\}$, pero no uniformemente, ni en $D(0,1)$. Sin embargo, converge uniformemente en $\bar{D}(0,R)$, con $0 < R < 1$.

Proposición 14. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ continua $\forall n \in \mathbb{N}$. Se verifica:

1. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\Omega \Longrightarrow f$ es continua en Ω.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ uniformemente en $\Omega \Longrightarrow S$ es continua en Ω.

Teorema (Criterio M-Weierstrass) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones complejas definidas en $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists M_n > 0$ tal que

i) $|f_n(z)| \leq M_n$ $\forall z \in \Omega$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente en Ω (esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente $\forall z \in \Omega$) y converge uniformemente en Ω.

Ejemplo 7. Convergencia de las series: **a)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

Proposición 15. (Convergencia uniforme e integración) Sean $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contorno y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de funciones continuas en Γ. Se verifica:

1. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\Gamma \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ uniformemente en $\Gamma \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz = \int_{\Gamma} S(z)dz$.

Proposición 16. (Convergencia uniforme y derivación) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se verifica:

1. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ conv. uniformemente a f en discos cerrados contenidos en Ω entonces

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ conv. a f' puntualmente en Ω y uniformemente en $K \subset \Omega$ compacto.

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$ uniformemente en discos cerrados contenidos en Ω entonces

- $S \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = S'$ $\forall z \in \Omega$ puntualmente en Ω y uniformemente en $K \subset \Omega$ compacto.

Ejemplo 8. Convergencia de las series: **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{nz}$. **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

2. Series de potencias complejas y funciones analíticas

2.1 Convergencia de las series de potencias

Definición. Se llama **serie de potencias** de centro z_0 y coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, siendo $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, a la serie funcional $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Proposición 17. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en $w \neq z_0$, entonces la serie converge absolutamente $\forall z \in D(z_0, |w-z_0|)$.

Teorema de Cauchy-Hadamard. Dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existe $R \in [0, +\infty]$ que depende sólo de $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ verificando:

i) Si $R \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \begin{cases} \text{converge absolutamente } \forall z \in D(z_0, R) \\ \text{conv. uniformemente en } \bar{D}(z_0, r)\, \forall r < R \\ \text{no converge si } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, R). \end{cases}$

ii) Si $R = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sólo converge en $z = z_0$ y su suma es a_0.

iii) Si $R = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ conv. absolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$ y uniformemente en todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto.

Si $R \in (0, +\infty)$, R se llama **radio de convergencia** y $D(z_0, R)$ **disco de convergencia**.

Fórmula de Cauchy-Hadamard

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, se verifica:[1]

i) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty) \Longrightarrow R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ es el radio de convergencia de la serie.

ii) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Longrightarrow$ la serie sólo converge en z_0 y su suma es a_0.

iii) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Longrightarrow$ la serie converge absolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$ y uniformemente sobre cualquier conjunto compacto.

Ejemplo 10. Cálculo del radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n}$. **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-(-1)^n}{2}\right)^n z^n$. **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

[1] El límite superior de una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es $+\infty$ si no está acotada superiormente y, si lo está, es el supremo de sus puntos de acumulación.

Observación: Si $R \in (0, +\infty)$ es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, sabemos que la serie converge en $D(z_0, R)$ y no converge en $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, R)$, pero ¿qué sucede en $\mathrm{Fr}(D(z_0, R))$? Pueden darse distintas situaciones:

- Dada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, $R = 1$, y la serie en $z = 1$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, que no converge.
- Dada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, y la serie en $z = 1$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, que es convergente.

2.2 Funciones analíticas y series de Taylor

Definición. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f es **analítica en $z_0 \in \Omega$** si existen $R > 0$ y una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\forall z \in D(z_0, R)$

Definición. Si f es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$, la **serie de Taylor de f en torno a z_0** es

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Si $z_0 = 0$ se dice **serie de MacLaurin**. El **polinomio de Taylor** de f en z_0 de grado n es la suma parcial n-ésima $P_n(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

Teorema de Taylor. Si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, se verifica:

i) La serie de Taylor de f en z_0 converge puntualmente a f en $D(z_0, R)$.

ii) La serie de Taylor de f en z_0 converge uniformemente a f en $\bar{D}(z_0, r)$ $\forall r < R$.

Ejemplo 11.

a) Exp$\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y su desarrollo en serie de MacLaurin es $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) La función $Log \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\})$ y no se puede desarrollar en serie de MacLaurin, pero su desarrollo de Taylor en torno a $z_0 = 1$ es:

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \text{ si } |z-1| < 1.$$

Proposición 19. (Unicidad de la representación en serie) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge a una función f en un disco centrado en z_0, entonces $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es la serie de Taylor de f en torno a z_0.

Ejemplo 12. Dado que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es la serie de MacLaurin de f.

2.3 Propiedades de las series de potencias

Observación: El radio de convergencia de una serie de potencias sólo depende de los coeficientes, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \forall z \in D(0, R) \Leftrightarrow f(z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \ \forall z \in D(z_0, R)$$

Así, del ejemplo 11 se sigue $\operatorname{Log}(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ si $|z| < 1$.

Proposición 20. Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, en $D(z_0, R_1)$, y $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, en $D(z_0, R_2)$, se cumple:

1. $f(z) + g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n$ $\forall z \in D(z_0, \min\{R_1, R_2\})$.

2. Si $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces $c \cdot f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n(z-z_0)^n$ $\forall z \in D(z_0, R_1)$

Ejemplo 13. **a)** $e^z + \frac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + 1\right) z^n$ si $|z| < 1$. **b)** $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Definición. Dadas dos series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, se define su **producto de Cauchy** como la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, donde $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposición 21. Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, en $D(z_0, R_1)$, y $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$, en $D(z_0, R_2)$, el producto de Cauchy de estas serie converge a $f \cdot g$ en $D(z_0, \min\{R_1, R_2\})$.

Ejemplo 14. $\dfrac{e^z}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right) z^n$ $\quad \forall z \in D(0, 1)$.

Proposición 22. (Integración de series de potencias) Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $D(z_0, R)$ entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} a_n(z-z_0)^n dz \quad \forall \Gamma \subset D(z_0, R) \text{ contorno.}$$

Ejemplo 15. El desarrollo de Taylor de $f(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ en $D(0, 1)$.

Proposición 23. (Derivación de series de potencias) Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $D(z_0, R)$, entonces $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ $\forall z \in D(z_0, R)$.

Ejemplo 16. $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Teorema Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ conjunto abierto, se verifica: $f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f$ es analítica en Ω.

3. Series de Laurent

Series "doblemente" infinitas

Dada una aplicación $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, que se identifica con el conjunto de sus imágenes $s(n) = z_n$ ordenadas, y se escribe $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, se considera la serie

$$\cdots + z_{-n} + z_{-n+1} + \cdots + z_{-1} + z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n.$$

Se dice que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \begin{Bmatrix} \textbf{converge} \\ \textbf{conv. absolutamente} \end{Bmatrix}$ si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \begin{Bmatrix} \text{convergen} \\ \text{conv.absolutamente} \end{Bmatrix}$, en cuyo caso su **suma** es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$$

Observación: Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ converge $\Longrightarrow \left(\sum_{k=-n}^{n} z_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge y su límite es S.El recíproco no es cierto, p. e., $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n$ no converge y la sucesión de sus sumas parciales simétricas converge a 0.

Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Se dice que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \begin{Bmatrix} \textbf{conv. puntualmente} \\ \textbf{conv. uniformemente} \end{Bmatrix}$ en Ω si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} \begin{Bmatrix} \text{conv. puntualmente} \\ \text{conv. uniformemente} \end{Bmatrix}$ en Ω.

Ejemplo 17. Dada $(f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, donde $f_n(z) = a_n z^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$ siendo $a_0 = 1$ y $a_n = a_{-n} = 1/2^n$. ¿Dónde converge la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$?

Series de Laurent

Definición. Se llama **serie de Laurent** de centro z_0 y coeficientes $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ a la serie funcional

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Proposición 24. Sean $(a_{-n})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$. Se verifica

i) Si $r \in (0,+\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \begin{cases} \text{converge absolutamente } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0,r) \\ \text{conv. unif. en } K \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0,r) \text{ compacto} \\ \text{no converge si } z \in D(z_0,r). \end{cases}$

ii) Si $r = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ conv. absolutamente $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y uniformemente en todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

iii) Si $r = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ no converge en ningún punto.

Corolario. Dada la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, si $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$, se verifica:

i) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0,+\infty)$ y $r < R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \begin{cases} \text{converge absolutamente si } r < |z-z_0| < R \\ \text{conv. unif. en todo compacto } K \subset \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\} \\ \text{no converge si } z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r \le |z-z_0| \le R\}. \end{cases}$$

ii) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0,r)$ y uniformemente en todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0,r)$

iii) Si $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ no converge en ningún punto.

Observación: Si $r > R$ la serie de Laurent no converge en ningún punto. ¿Qué sucede si $r = R$? En la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$, se tiene $r = R = 1$ y la serie no converge en $z = 1$. Pero, para $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, siendo $a_0 = 0$ y $a_n = a_{-n} = 1/n^2$, se tiene $r = R = 1$ y la serie converge para $z = 1$.

Ejemplo 18. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}$. **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n}$.

Teorema de Laurent. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r, R \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq r < R$. Si f es holomorfa en $\Omega_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ entonces la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

siendo $\Gamma \subset \Omega_{r,R}$ una curva de Jordan positivamente orientada tal que $z_0 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$, converge a f puntualmente en $\Omega_{r,R}$ y uniformemente en todo conjunto compacto $K \subset \Omega_{r,R}$.

Proposición 25. (Unicidad de la representación en serie de Laurent)
Si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $\forall z \in \Omega_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es la serie de Laurent de f en $\Omega_{r,R}$

Observación:

a) El teorema de Laurent es válido para $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_0, R)$ y $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ en lugar de $\Omega_{r,R}$.

b) Si $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$, entonces su desarrollo de Laurent en $D^*(z_0, R)$ coincide con el desarrollo de Taylor de f en $D(z_0, R)$.

c) Las propiedades aritméticas, de integración y de derivación de series de Laurent, son similares a las de las series de potencias.